数学　「過去問添削特講」

①氏名・シール

ここには記入しないでください

$n$ は2以上の整数とする。$3n$ 本のうち3本が当たり，$(3n-3)$ 本がはずれであるくじがある。A，B，Cの3人が，Aから始めてA，B，C，A，B，C，……の順に1本ずつくじを引いていき，3本目の当たりくじを引いた人を勝者とするゲームを行う。ただし，引いたくじはもとに戻さないものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k$ 本目 $(k \geqq 3)$ のくじを引くまでに（3人の引いたくじの本数の合計が $k$ となるまでに），勝者が決まる確率 $p_k$ を求めよ。ただし，ちょうど $k$ 本目のくじを引いたとき，勝者が決まる場合を含む。

(2) ちょうど $k$ 本目 $(k \geqq 3)$ のくじを引いたとき，勝者が決まる確率 $q_k$ を求めよ。

(3) A，B，Cが勝者となる確率をそれぞれ $a$，$b$，$c$ とするとき，$a+c$ と $2b$ はどちらが大きいか。

(1)
$$P_k = \frac{{}_3C_3 \times {}_{3n-3}C_{k-3}}{{}_{3n}C_k}$$

求める確率は，
くじをk本引くとき，3本の当たりくじを全て引く確率に等しいことが押さえられたね。Good!

$$= \frac{(3n-3)!}{(k-3)!\{(3n-3)-(k-3)\}!} \times \frac{k!(3n-k)!}{(3n)!}$$

立式・計算はOK

$$= \frac{(3n-3)!\,k!\,\cancel{(3n-k)!}}{(k-3)!\,\cancel{(3n-k)!}\,(3n)!}$$

最初に
「引き方の総数は，${}_{3n}C_k$通り。
このうち，3本の当たりくじをすべて引く引き方は，${}_3C_3 \times {}_{3n-3}C_{k-3}$通りであるから」
と説明してから，確率を立式しよう。

$$= \frac{k(k-1)(k-2)}{3n(3n-1)(3n-2)} \quad //$$

記述のポイント

どのように考えて立式したのか，考え方を述べておこう！考え方にミスがないか，後で見直すときに役に立つよ。

(2)
$$q_k = P_k - P_{k-1}$$

$$= \frac{k(k-1)(k-2)}{3n(3n-1)(3n-2)} - \frac{(k-1)(k-2)(k-3)}{3n(3n-1)(3n-2)}$$

（ちょうどk本目に勝者が決まる確率）
＝(k本目までに勝者が決まる確率)
－((k-1)本目までに勝者が決まる確率)
と考えたのは Good! このように考えると
(1)で求めた$p_k$の式が利用できるね。

$$= \frac{(k-1)(k-2)\{k-(k-3)\}}{3n(3n-1)(3n-2)}$$

$$= \frac{(k-1)(k-2)}{n(3n-1)(3n-2)} \quad //$$

答えはOK

ただし，項数に注意！
(k-1)本目を考えていることから
以下のように場合分けが必要だ。

(1)で求めた$p_k$は,$k \geqq 3$ のときに成り立つ式だから，
$q_k = p_k - p_{k-1}$ においては，$k-1 \geqq 3$　つまり，$k \geqq 4$
でないといけない。

よって，$k=3$ のときは，$q_3 = p_3$であることに注意して $q_3$を求めよう。
そして，$k \geqq 4$ のときの$q_k$の式で,$k=3$とおいたものと一致するかどうか確認して，
答えをまとめよう。

ここには記入しないでください

①名前シール

[カメラ提出] 氏名を記入

| フリガナ | | フリガナ | |
|---|---|---|---|
| 姓 | | 名 | |

[郵送提出] 会員番号シールを貼付、ない場合は氏名を記入

②会員番号

※②の郵送提出で会員番号シールがない場合は記入してください。

△

(3) $a = g_4 + g_7 + \cdots + g_{3n-2}$

$= \sum_{m=1}^{n-1} g_{3m+1} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{3m(3m-1)}{n(3n-1)(3n-2)}$

(2)の結果を利用して，A,B,Cが勝者になる確率をΣで正しく表せたね。Good!

$b = g_5 + g_8 + \cdots + g_{3n-1}$

$= \sum_{m=1}^{n-1} g_{3m+2} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(3m+1)\cdot 3m}{n(3n-1)(3n-2)}$

$c = g_3 + g_6 + \cdots + g_{3n}$

$= \sum_{m=1}^{n} g_{3m} = \sum_{m=1}^{n} \frac{(3m-1)(3m-2)}{n(3n-1)(3n-2)}$

ここでも項数に注意！【★1】

$a+c = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{3m(3m-1)}{n(3n-1)(3n-2)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{(3m-1)(3m-2)}{n(3n-1)(3n-2)}$

ここまではOK

$= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{9m^2-3m+9m^2-9m+2}{n(3n-1)(3n-2)} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{18m^2-12m+2}{n(3n-1)(3n-2)}$

$a+c$の計算ミス【★2】

$2b = 2\sum_{m=1}^{n-1} \frac{(3m+1)\cdot 3m}{n(3n-1)(3n-2)} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{18m^2+6m}{n(3n-1)(3n-2)}$

これはOK

$m \geqq 1$だから　$18m^2-12m+2 < 18m^2+6m$

よって　$a+c < 2b$　//（答）$2b$より$a+c$の方が大きい　$(a+c > 2b)$

【★1】 $a$ は，$m=1$から $m=n-1$ までの和だけれど，$c$ は，$m=1$ から $m=n$ までの和 だよ。

【★2】 $c$ が1項多いことに注意して，もう一度計算してみよう。次のようになるよ。

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{9m^2-3m+9m^2-9m+2}{n(3n-1)(3n-2)} \boxed{+\frac{(3n-1)(3n-2)}{n(3n-1)(3n-2)}}$$

← $m=n$ のとき

方針はよかったけれど，$a+c$ はΣ以外の項も出てくるから，単純に比較できない。

$a+c-2b$ を計算して，その符号を調べよう。

志望大を教えてください

ひとこと

（できた！

前問の結果を用いて正しく方針を立てることができたね！ただ，cは$m=n$までの総和であることを見落としたのが惜しかった！今後はこの部分にも注意しながら計算していけるとよいね。

赤ペン先生からきみへ

# アドバイスシート

【総評】 (1)では，「k本目のくじを引くまでに勝者が決まる確率」を場合の数が求めやすいように読みかえて考えているのがよかったです。(2),(3)では,前問の確率を利用して考えることができましたね。ただ,(3)は計算ミスが惜しかった！もっと簡単に解ける別解を示しておきましたので，復習してみてくださいね。「起こり得るすべての場合の確率の和は１」という性質は，確率の問題を解く上で重要なポイントになることが多いので，使えるようにしておきましょう。

（３）　【別解】

a,b,cの値すべてを求める計算は大変だね。
ひと工夫することで，計算の手間を省くことができるよ。

大小比較は，差を取って，符号を調べる　のが基本だね。

ここでは，$(a+c)-2b$ の符号を調べるとよいが，次の条件を利用すると，
計算が軽減されるよ。

見直しPOINT

A，B，Cのいずれか１人が必ず勝者になるから，
$$a+b+c=1$$

これを利用すると，$a+c=1-b$ だから，
$$(a+c)-2b=1-3b$$
となるので，$1-3b$の符号を調べればよいことになる。

キミは正しく
$$b=q_5+q_8+\cdots\cdots+q_{3n-1}=\sum_{m=1}^{n-1}q_{3m+2}$$

を求めていたね。それを $1-3b$ に代入して整理し，$n\geqq 2$ であることに注意して，
その符号を調べてみよう。