

9 次の方程式を解け。

$$|x-1|=|x+2|+x$$

解 答

(i) $x \geq 1$ のとき、

$x-1 \geq 0, x+2 > 0$ だから、

$$|x-1|=x-1$$

$$|x+2|=x+2$$

よって、与えられた方程式は、

$$x-1=(x+2)+x$$

$$x=-3$$

$x=-3$ は、 $x \geq 1$ の条件を満たしていないから不適。

(ii) $-2 \leq x < 1$ のとき、

$x-1 < 0, x+2 \geq 0$ だから、

$$|x-1|=-(x-1)$$

$$|x+2|=x+2$$

よって、与えられた方程式は、

$$-(x-1)=(x+2)+x$$

$$-x+1=2x+2$$

$$x=-\frac{1}{3}$$

$x=-\frac{1}{3}$ は、 $-2 \leq x < 1$ の条件を満たす。

(iii) $x < -2$ のとき、

$x-1 < 0, x+2 < 0$ だから、

$$|x-1|=-(x-1)$$

$$|x+2|=-(x+2)$$

よって、与えられた方程式は、

$$-(x-1)=-(x+2)+x$$

$$-x+1=-x-2+x$$

$$x=3$$

$x=3$ は、 $x < -2$ の条件を満たしていないから不適。

(i), (ii), (iii) より、

$$x=-\frac{1}{3} \quad \dots\dots(\text{答})$$

場合分けをした後は、絶対値記号の中が0以上の値をとるか負の値をとるか調べて絶対値記号をはずすが、下のような図をかくとわかりやすい。



これはNG!

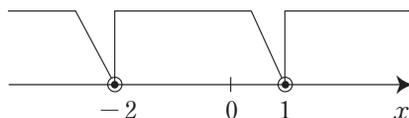
$x=-3$ を解としてはいけない。場合分けをした条件を満たすかどうか、確認を忘れずに。(ii),(iii)の場合についても同様だ。

(i), (ii), (iii) で求めた x の値をまとめたものが解。

解 説

絶対値記号をはずすには、絶対値記号の中の式が0以上か負かで場合分けをすればよい。

場合分けの境目は、絶対値記号の中が0になるときだから、この問題では、 $x-1, x+2$ の値が0になる1, -2を境に場合分けすればよい。右の図より、 $x \geq 1, -2 \leq x < 1, x < -2$ の3つに場合分けすればよいことがわかる。



解き方のまとめ

絶対値を含む方程式・不等式の解き方

「絶対値記号の中の式の符号によって場合分けし、絶対値記号をはずす」。場合分けをする範囲をきちんと押さえるためには、数直線を用いるとよい。