解答

1 (1) (ア) $\dfrac{1}{4}$, $\sqrt{9}$, $\dfrac{7}{6}$, -1, 0.251 ……(答)

(イ) $\dfrac{7}{6}$ ……(答)

$\dfrac{7}{6}=1.1\dot{6}$

$\sqrt{9}=3$ となるので有理数

(2) $\dfrac{5}{33}=0.151515\cdots$

$=0.\dot{1}\dot{5}$ ……(答)

(3) $x=0.\dot{1}0\dot{8}$ とおく。

$$\begin{array}{rrl} & 1000x= & 108.108108\cdots \\ -) & x= & 0.108108\cdots \\ \hline & 999x= & 108 \end{array}$$

上の計算より，

$999x=108$

よって，$x=\dfrac{108}{999}=\dfrac{4}{37}$ ……(答)

2 (1) $a=12,\ -12$ ……(答)

(2) ① $|4-11|=|-7|=7$ ……(答)

② $|-5|-|-8|=5-8$

$=-3$ ……(答)

3 (1) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})(3\sqrt{2}-4\sqrt{3})$

$=1\cdot3(\sqrt{2})^2+\{1\cdot(-4\sqrt{3})+\sqrt{3}\cdot3\}\sqrt{2}$

$+\sqrt{3}\cdot(-4\sqrt{3})$

$=6+(-\sqrt{3})\cdot\sqrt{2}-12$

$=-6-\sqrt{6}$ ……(答)

$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}$

$=\dfrac{3(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}$

$=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ ……(答)

4 (1) $3x+5<x-4$

$3x-x<-4-5$

$2x<-9$

移項して
$ax<b$ の形にする。

$x<-\dfrac{9}{2}$ ……(答)

(2) $\begin{cases} 2(3x-1)>5x+1 & \cdots\cdots① \\ 5-3x\geqq-2x & \cdots\cdots② \end{cases}$

とする。

①より，

$6x-2>5x+1$

$6x-5x>1+2$

$x>3$ ……③

②より，

$-3x+2x\geqq-5$

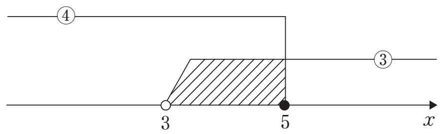
$-x\geqq-5$

$x\leqq5$ ……④

③，④の共通範囲は，

$3<x\leqq5$ ……(答)

③と④を同時に
満たす x の値の
範囲を求める。



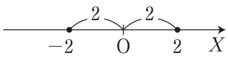
5 次の方程式，不等式を解け。

(1)　$|x+3|=2$　　(2)　$|x|\leqq 6$　　(3)　$|x-4|>3$

解答

(1)　$|x+3|=2$ において，$X=x+3$ とおくと，$|X|=2$ より，

$X=\pm 2$

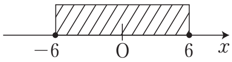


よって，$x+3=2$，$x+3=-2$

すなわち，$x=-1$，-5　……**(答)**

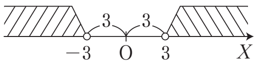
(2)　$|x|\leqq 6$ より，

$-6\leqq x\leqq 6$　……**(答)**



(3)　$|x-4|>3$ において，$X=x-4$ とおくと，$|X|>3$ より，

$X<-3$，$3<X$



よって，$x-4<-3$，$3<x-4$

すなわち，$x<1$，$7<x$　……**(答)**

確認　絶対値

$c>0$ のとき，

$|x|=c$ の解は，$x=\pm c$

$|x+a|$ の形の式は $x+a=X$ とおいて考える。

確認　絶対値

$c>0$ のとき，

$|x|<c$ の解は，

$-c<x<c$

確認　絶対値

$c>0$ のとき，

$|x|>c$ の解は，

$x<-c$，$c<x$

解説

数直線上で，原点 O から点 $\mathrm{A}(a)$ までの距離 OA を a の絶対値といい，$|a|$ で表す。

この絶対値の定義にあてはめて，絶対値を含む方程式，不等式を考えると，c を 0 より大きい実数として，

・$|x|=c$ は，「x は数直線上で原点 O からの距離が c である数」ということになるので，$x=\pm c$ である。

・$|x|<c$ は，「x は数直線上で原点 O からの距離が c より小さい範囲にある数」ということになる。このような数は，$-c$ より大きく，c より小さい数なので，$-c<x<c$ である。

・$|x|>c$ は，「x は数直線上で原点 O からの距離が c より大きい範囲にある数」ということになる。このような数は，$-c$ より小さい数か，c より大きい数なので，$x<-c$，$c<x$ である。

同様に考えると，

(1) $|x+3|=2$　→ $x+3=X$ と置き換えると，X は数直線上で，原点 O からの距離が 2 である数　→ $X=\pm 2$ すなわち，$x+3=\pm 2$

(2) $|x|\leqq 6$　→ x は数直線上で，原点 O からの距離が 6 以下の範囲にある数　→ $-6\leqq x\leqq 6$

(3) $x-4=X$ と置き換えると，X は数直線上で，原点 O からの距離が 3 より大きい数ということになる。この条件を式に表してから，もとの $x-4$ のとりうる値の範囲を求めることになる。考え方の流れは以下の通り。

$|X|>3 \to X<-3,\ 3<X \to x-4<-3,\ 3<x-4 \to x<1,\ 7<x$

解き方のまとめ

絶対値を含む方程式，不等式の解き方

絶対値記号の中身をカタマリと考えて，絶対値の定義にあてはめて考える。

6 $x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$，$y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) x^2+y^2　　(2) x^4+y^4

解答

$$x+y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

$$xy=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\times\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{5-1}{4}=1$$

(1) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=(\sqrt{5})^2-2\times 1$
$=5-2$
$=3$ ……**(答)**

(2) $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2$
$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-2(xy)^2$
$=3^2-2\times 1^2$
$=7$ ……**(答)**

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ より，
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x^2=X$，$y^2=Y$ とおくと，
$x^4+y^4=X^2+Y^2$ だから，
(1)と同じ変形が使える。

(1)の結果 $x^2+y^2=3$ を利用する。

確認　対称式

$x+y$，xy，x^2+y^2 などの式は，2つの文字 x と y を交換しても同じ式になる。このような式を x，y についての対称式という。対称式は基本対称式 $x+y$，xy で表すことができる。

x^2+y^2
↓　↓　同じ式
y^2+x^2

得点UPのコツ

x，y の値を直接代入しても求められるが，x^4+y^4 などは計算が複雑になる。式を変形して計算を簡単にするという考え方は，今後も重要だ。式を変形してから値を代入しよう。

解説

値を求める式がいずれも x と y の対称式なので，まず，基本対称式 $x+y$，xy の値を求める。そして，それぞれの対称式を $x+y$，xy で表すように変形する。

解き方のまとめ

x，y の対称式の値の求め方

Step1　基本対称式 $x+y$，xy の値を求める。

Step2　値を求める対称式を $x+y$，xy で表す。

Step3　Step2 で導いた式に，$x+y$，xy の値を代入する。

7 ある整数 a を 6 で割ると割り切れる。この整数 a を 8 で割ると，商は a を 6 で割った商より 2 小さく，余りが出た。このとき，a の値を求めよ。

解答

a を 6 で割ったときの商を x（x は整数）とおくと，

$a=6x$ ……①

また，a を 8 で割ったときの商は $x-2$ で，余りは 1 以上 7 以下だから，

$8(x-2)+1 \leqq a \leqq 8(x-2)+7$ ……②

①，②より，

$8(x-2)+1 \leqq 6x \leqq 8(x-2)+7$

この連立不等式は，

$$\begin{cases} 8(x-2)+1 \leqq 6x & \cdots\cdots ③ \\ 6x \leqq 8(x-2)+7 & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

と同じである。

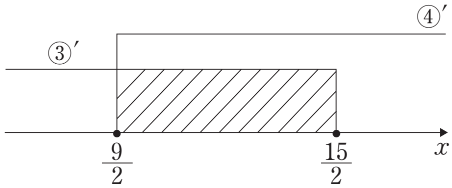
③より，$8x-15 \leqq 6x$

$x \leqq \dfrac{15}{2}$ ……③′

④より，$6x \leqq 8x-9$

$x \geqq \dfrac{9}{2}$ ……④′

③′，④′の共通範囲は，$\dfrac{9}{2} \leqq x \leqq \dfrac{15}{2}$



x は整数だから，$x=5,\ 6,\ 7$

このとき，①より，$a=30,\ 36,\ 42$ ……**(答)**

a を未知数として，a についての式を立ててもよいが，分数が出てこないように商を x とした。

$A \leqq B \leqq C$ の形の不等式は，連立不等式 $\begin{cases} A \leqq B \\ B \leqq C \end{cases}$ として解けばよい。

確認　連立不等式の解き方

それぞれの不等式を解いて，それらの解の共通範囲を求める。

$a=6x$ ……①から求める。

解説

A を B で割ったときの商が X，余りが Y のとき，余り Y は割る数 B より小さいから，

$A=BX+Y\ (0 \leqq Y < B)$

A が B で割り切れるとき，$Y=0$ だから，$A=BX$

余りが出るとき，$A=BX+Y$ を変形した $A-BX=Y$ を $0<Y<B$ に代入して，

$0<A-BX<B$

よって，

$BX<A<BX+B$

この問題に当てはめると，$8(x-2)<a<8(x-2)+8$ と考えてもよい。

解き方のまとめ

整数についての文章題

未知の数を x とおき，条件を満たす x についての方程式・不等式をつくる。

8 $\dfrac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}-3}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，a^2+b^2 の値を求めよ。

解答

$$\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{13}-3}=\frac{(\sqrt{13}+1)(\sqrt{13}+3)}{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}$$

$$=\frac{(\sqrt{13})^2+(1+3)\sqrt{13}+3}{(\sqrt{13})^2-3^2}$$

分母に無理数を含む式は，公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
を利用して，まず分母を有理化する。

$$=\frac{13+4\sqrt{13}+3}{13-9}$$

$$=\sqrt{13}+4$$

ここで，$9<13<16$ より，

$$\sqrt{9}<\sqrt{13}<\sqrt{16}$$

平方根を含む数の大小

2 つの正の数 a，b について
$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$

$$3<\sqrt{13}<4$$

だから，

$$7<\sqrt{13}+4<8$$

$3<\sqrt{13}<4$ の各辺に 4 を加えると，
$7<\sqrt{13}+4<8$

したがって，　$a=7$

$a+b=\sqrt{13}+4$ より，

$$b=\sqrt{13}+4-a$$

(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)

$$=\sqrt{13}+4-7$$

$$=\sqrt{13}-3$$

よって，

$$a^2+b^2=7^2+(\sqrt{13}-3)^2$$

$$=49+13-6\sqrt{13}+9$$

$$=71-6\sqrt{13}$$　……(答)

解説

例えば，$\sqrt{5}$ の整数部分と小数部分を求めてみよう。$2<\sqrt{5}<3$ だから，整数部分は 2 である。
また，(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)より，小数部分は $\sqrt{5}-2$ となるね。
つまり，無理数 $\sqrt{x}$ の整数部分は，$n<\sqrt{x}<n+1$ を満たす整数 n，すなわち，$\sqrt{x}$ を超えない最大の整数 n である。
また，小数部分は，$\sqrt{x}-(\sqrt{x}$ の整数部分$)=\sqrt{x}-n$
となる。整数部分がはっきりとしないときには，
平方根を含む数の大小の性質「2 つの正の数 a，b について，$a<b$ ならば，$\sqrt{a}<\sqrt{b}$」
を利用する。

(例) $25<29<36$ だから，

$$\sqrt{25}<\sqrt{29}<\sqrt{36}$$

つまり，$5<\sqrt{29}<6$
よって，$\sqrt{29}$ の整数部分は 5 である。

解き方のまとめ

無理数の整数部分，小数部分の求め方

無理数 $\sqrt{x}$ の整数部分，小数部分を求めるには，$n<\sqrt{x}<n+1$ となる整数 n を見つける。このときの n が $\sqrt{x}$ の整数部分，$\sqrt{x}-n$ が小数部分である。

9 次の方程式を解け。

$|x-1|=|x+2|+x$

解答

(i)　$x \geqq 1$ のとき，

$x-1 \geqq 0$，$x+2>0$ だから，

$|x-1|=x-1$

$|x+2|=x+2$

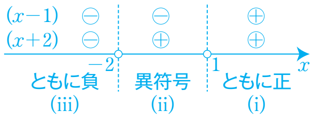
よって，与えられた方程式は，

$x-1=(x+2)+x$

$x=-3$

$x=-3$ は，$x \geqq 1$ の条件を満たしていないから不適。

場合分けをした後は，絶対値記号の中が 0 以上の値をとるか負の値をとるか調べて絶対値記号をはずすが，下のような図をかくとわかりやすい。



これはNG!

$x=-3$ を解としてはいけない。場合分けをした条件を満たすかどうか，確認を忘れずに。(ii)，(iii)の場合についても同様だ。

(ii)　$-2 \leqq x<1$ のとき，

$x-1<0$，$x+2 \geqq 0$ だから，

$|x-1|=-(x-1)$

$|x+2|=x+2$

よって，与えられた方程式は，

$-(x-1)=(x+2)+x$

$-x+1=2x+2$

$x=-\dfrac{1}{3}$

$x=-\dfrac{1}{3}$ は，$-2 \leqq x<1$ の条件を満たす。

(iii)　$x<-2$ のとき，

$x-1<0$，$x+2<0$ だから，

$|x-1|=-(x-1)$

$|x+2|=-(x+2)$

よって，与えられた方程式は，

$-(x-1)=-(x+2)+x$

$-x+1=-x-2+x$

$x=3$

$x=3$ は，$x<-2$ の条件を満たしていないから不適。

(i)，(ii)，(iii) より，

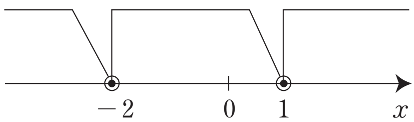
$x=-\dfrac{1}{3}$　……(答)

(i)，(ii)，(iii) で求めた x の値をまとめたものが解。

解説

絶対値記号をはずすには，絶対値記号の中の式が 0 以上か負かで場合分けをすればよい。

場合分けの境目は，絶対値記号の中が 0 になるときだから，この問題では，$x-1$，$x+2$ の値が 0 になる 1，-2 を境に場合分けすればよい。右の図より，$x \geqq 1$，$-2 \leqq x<1$，$x<-2$ の 3 つに場合分けすればよいことがわかる。



解き方のまとめ

絶対値を含む方程式・不等式の解き方

「絶対値記号の中の式の符号によって場合分けし，絶対値記号をはずす」。場合分けをする範囲をきちんと押さえるためには，数直線を用いるとよい。

場合の数と確率③ 解答解説

解答

1 起こりうるすべての場合の数は，

$_{15}C_3$ 通り

であり，どの場合も同様に確からしい。 ←「同様に確からしい」ことを必ず確認する。

このうち，当たりくじ5本の中から3本を引く場合の数は，

$_5C_3$ 通り

である。よって，求める確率は，

$$\frac{_5C_3}{_{15}C_3}=\frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2\cdot1}{15\cdot14\cdot13}$$
$$=\frac{2}{91} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

2 全事象を U とすると，$n(U)=100$ であり，どのカードを取り出すことも同様に確からしい。

取り出したカードの番号が「5の倍数である」という事象を A，「7の倍数である」という事象を B とすると，「5の倍数または7の倍数である」という事象は $A\cup B$ である。

ここで，

$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$

より，$n(A)=20$

$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$

より，$n(B)=14$

$A\cap B=\{35\cdot1,\ 35\cdot2\}$ ← $A\cap B$ は，5と7の最小公倍数35の倍数であるという事象。

より，$n(A\cap B)=2$

よって，

$$P(A)=\frac{20}{100}$$
$$P(B)=\frac{14}{100}$$
$$P(A\cap B)=\frac{2}{100}$$

したがって，求める確率は，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{20}{100}+\frac{14}{100}-\frac{2}{100}$$
$$=\frac{32}{100}=\frac{8}{25} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

↑ 和事象の確率

3 起こりうるすべての場合の数は，

$6\times6=36$（通り）

これらのどの場合が起こることも同様に確からしい。

「少なくとも1つの目が奇数である」という事象を A とすると，その余事象 $\overline{A}$ は，「どちらの目も偶数である」という事象である。事象 $\overline{A}$ の起こる場合の数は，2個のさいころのどちらの目も2，4，6のいずれかである場合の数に等しいから，

← 2個のさいころの目の出方は，
(i) どちらも奇数
(ii) 1つが奇数，もう1つが偶数
(iii) どちらも偶数
の3つの場合がある。

$3\times3=9$（通り）

よって，$\overline{A}$ の起こる確率 $P(\overline{A})$ は，

$$P(\overline{A})=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

したがって，少なくとも1つの目が奇数である確率 $P(A)$ は，

余事象の確率

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

4 1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に投げる試行と2回目に投げる試行は独立である。

4以上の目が出る確率は，$\frac{3}{6}$

4以下の目が出る確率は，$\frac{4}{6}$

よって，1回目に4以上の目が出て，2回目に4以下の目が出る確率は，

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$ ← 独立試行の確率

5 玉を1個取り出したとき，

白玉である確率は，$\dfrac{1}{5}$

白玉でない確率は，$\dfrac{4}{5}$

よって，4回続けて取り出すとき，白玉がちょうど3回出る確率は，

$${}_4C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\frac{4}{5}=4\times\frac{1}{5^3}\times\frac{4}{5}$$

← 反復試行の確率

$$=\frac{16}{625}$$

……**(答)**

6「1回目に取り出した玉が赤玉である」という事象を A,「2回目に取り出した玉が赤玉である」という事象を B とすると,「2個とも赤玉である」という事象は $A\cap B$ である。

1回目は，7個の中に赤玉が4個あるので，

$$P(A)=\frac{4}{7}$$

1回目が赤玉のとき，2回目は，残り6個の中に赤玉が3個あるので，

$$P_A(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2個とも赤玉であるとき，2回目が赤玉である確率は，“1回目が赤玉だったとき”という条件が付くので，$P_A(B)$ である。

よって，2個とも赤玉である確率は，確率の乗法定理より，

$$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$$

$$=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}$$

……**(答)**

確率の乗法定理

7 9枚のカードから，2枚のカードを引くとき，引いたカードの数字が「どちらも素数である」という事象を A,「1枚が2である」という事象を B とすると，求める確率は $P_A(B)$ である。

素数：1と自分自身以外に約数をもたない2以上の整数。

事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率。

事象 A の起こる場合の数は，2，3，5，7の4枚のカードから2枚のカードを選ぶ組合せの数に等しく，

$$n(A)={}_4C_2=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}=6\text{（通り）}$$

事象 $A\cap B$ の起こる場合は，1枚は2のカード，もう1枚は3，5，7の3枚の素数のカードから1枚を引く場合である。その場合の数は，3枚の素数のカードから，1枚のカードを選ぶ組合せの数に等しいから，

$$n(A\cap B)={}_3C_1=3$$

条件付き確率

よって，$P_A(B)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

……**(答)**

場合の数と確率

8 赤玉 7 個，白玉 5 個が入っている袋から，玉を同時に 4 個取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1)　赤玉と白玉がそれぞれ 2 個ずつとなる確率

(2)　少なくとも 1 個は赤玉である確率

解答

(1)　赤玉 7 個，白玉 5 個を合わせた 12 個の中から 4 個の玉を取り出す方法は，全部で，

$_{12}C_4$ 通り

あり，どの場合も同様に確からしい。

赤玉と白玉がそれぞれ 2 個ずつとなるのは，7 個の赤玉から 2 個，5 個の白玉から 2 個取り出す場合であるから，全部で，

$_7C_2 \times {}_5C_2$（通り）

ある。

よって，求める確率は，

$$\frac{_7C_2 \times {}_5C_2}{_{12}C_4} = \frac{21 \times 10}{495} = \frac{14}{33}$$ ……**(答)**

(2)　「少なくとも 1 個は赤玉である」という事象を A とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ は，「4 個とも白玉である」という事象である。

余事象 $\overline{A}$「4 個とも白玉である」の起こる場合の数は，5 個の白玉から 4 個取り出す場合の数であるから，

$_5C_4$ 通り

よって，「4 個とも白玉である」確率 $P(\overline{A})$ は，

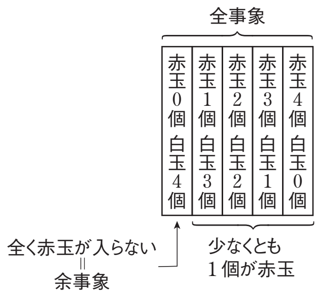
$$P(\overline{A}) = \frac{_5C_4}{_{12}C_4} = \frac{5}{495} = \frac{1}{99}$$

したがって，「少なくとも 1 個は赤玉である」確率 $P(A)$ は，

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$ ……**(答)**

得点UPのコツ

「少なくとも～」が出てきたら，まず，全事象を互いに排反な事象に分けて，余事象を使うことが有効でないか考えてみよう。この問題のように，余事象を考えれば速く簡単に解けることが多い。



確認　余事象の確率

事象 A とその余事象 $\overline{A}$ に対して

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

また，

$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

解説

組合せの考え方を使って確率を求める問題だ。(1)は，赤玉 2 個と白玉 2 個が同時に出る場合だから，積の法則を使えばよい。(2)は，「少なくとも～である」とあるから，余事象の「全く～でない」を考えれば，$P(A) = 1 - P(\overline{A})$ を使って求められるね。もちろん，余事象を考えなくてもできるが，少なくとも 1 個が赤玉になるのは，赤玉が 1 個の場合，2 個の場合，3 個の場合，4 個の場合の 4 通りもあるから計算が面倒だ　余事象は複雑な場合の数を求める場合に活躍するので，活用できるようにしておこう。

解き方のまとめ

余事象を活用した確率の求め方

全事象を互いに排反な事象に分けたとき，余事象の方が求めやすければ，次の余事象の確率を利用する。

事象 A と，その余事象 $\overline{A}$ に対して，

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$　　また，$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

特に，「少なくとも～である」とあるときは，余事象の利用を考えるとよい。

9 a，b，c の 3 人が試験を受ける。a，b，c の合格率がそれぞれ $\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{2}$ であるとき，a，b，c のうち 2 人だけが合格する確率を求めよ。

解答

a，b，c が試験を受けるという試行をそれぞれ T_1，T_2，T_3とすると，
T_1，T_2，T_3 は独立である。

試行 T_1 で a が合格するという事象をA
試行 T_2 で b が合格するという事象をB
試行 T_3 で c が合格するという事象をC

とする。a，b，c のそれぞれが不合格であるという確率は，事象 A，B，C の余事象 $\overline{A}$，$\overline{B}$，$\overline{C}$ の起こる確率だから，

$$P(\overline{A})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P(\overline{B})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$
$$P(\overline{C})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

a，b，c のうち 2 人だけが合格するのは，次の3 つの場合がある。

（i） a，b だけが合格する場合で，その確率は，
$$P(A)P(B)P(\overline{C})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{30}$$

(ii) a，c だけが合格する場合で，その確率は，
$$P(A)P(\overline{B})P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{30}$$

(iii) b，c だけが合格する場合で，その確率は，
$$P(\overline{A})P(B)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{30}$$

（i）～(iii) の事象は互いに排反だから，求める確率は，
$$\frac{2}{30}+\frac{3}{30}+\frac{4}{30}=\frac{3}{10}$$ ……(答)

確認 余事象の確率
全事象 U の中の事象 A について，A が起こらないという事象を A の余事象といい，$\overline{A}$ で表す。この余事象 $\overline{A}$ の確率は，
$P(\overline{A})=1-P(A)$

得点UPのコツ
それぞれの確率は約分しないでおくと分母がそろうので，最後に足し合わせるときに計算が楽になる。

確認 排反事象の確率
事象 A，B，C が互いに排反であるとき，
$P(A\cup B\cup C)$
$=P(A)+P(B)+P(C)$

解説

上の(i)～(iii)のように場合分けするということは，「a, b, c のうち 2 人だけが合格する」という事象を「a, b だけが合格する」「a, c だけが合格する」「b, c だけが合格する」という 3 つの排反事象に分けたということと同じことだ。よって，(i)～(iii)の各々の場合で求めた確率を足し合わせればよい。
また，a，b，c がそれぞれ試験を受けるという試行 T_1，T_2，T_3 は，どれか 1 つの結果が他の結果に何の影響も与えない試行，つまり独立な試行であることにも注目しよう。

解き方のまとめ

場合分けが必要な確率の求め方
条件に沿って場合分けを行い，各場合の確率を求めたら，各々の事象は排反であることから，求めた確率をすべて足し合わせる。

独立な試行の確率の求め方
各試行 T_1，T_2，T_3が独立であるとき，T_1で事象 A が起こり，T_2で事象 B が起こり，T_3で事象 C が起こる確率は，
$P(A)P(B)P(C)$
試行が 4 つ以上ある場合も同様に掛け合わせればよい。

10 A チームと B チームが野球の試合を行い，先に 4 勝した方が優勝となる。1 回の試合で A が B に勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$ で，引き分けはないものとするとき，6 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

解答

1 回の試合で A が B に勝つ確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから，A が負ける確率は，

$$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

6 試合目で A が優勝するのは，

5 試合目までで A が 3 勝 2 敗となり，

6 試合目に A が勝つ

場合である。

5 試合が終わったところで A が 3 勝 2 敗となる確率は，

$$ {}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=10\times\frac{1}{27}\times\frac{4}{9}$$

$$=\frac{40}{243}$$

また，6 試合目に A が B に勝つ確率は，$\dfrac{1}{3}$

よって，求める確率は，

$$\frac{40}{243}\times\frac{1}{3}=\frac{40}{729}$$ ……(答)

これはNG!

優勝が決まった時点で通算して考えると，A が 4 勝 2 敗となるので，

$${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

としては間違い。このように計算すると，A が 4 試合目 5 試合目で優勝を決めるケースが含まれてしまう。

確認 反復試行の確率

回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A がちょうど r 回起こる確率は，

$${}_nC_rp^rq^{n\ r}$$

（ただし，$q=1-p$）

解説

これはNG! にもあるように，「6 試合のうち，A が 4 勝 2 敗である」と「先に 4 勝した方が優勝するとき，6 試合目で A が優勝する」との違いが理解できているかがポイントだ。A が勝つことを○，負けることを×で表して，違いを考えてみよう。

前者は 6 試合のうち A が 4 回勝てばよいので，${}_6C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^2$ として求められるが，このようにすると，○○○○××，○○○×○×などの，5 試合目までで A の優勝が決まる場合の確率も含まれてしまう。したがって，5 試合目までと 6 試合目を分けて考え，5 試合目までのうち A が 3 回勝ち，6 試合目に A が勝つとすればよい。

解き方のまとめ

先に r 回勝つ確率の求め方

A，B の 2 チームが行う試合で，先に r 回勝った方が優勝するとき n 試合目で A が優勝する確率を求めるには，$(n-1)$ 試合目までに A が $(r-1)$ 回勝つ確率を「反復試行の確率」によって求め，n 試合目に A が勝つ確率と掛け合わせる。

11 箱 a に赤玉 4 個と白玉 6 個，箱 b に赤玉 5 個と白玉 5 個が入っている。さいころを投げて，1，2 のいずれかが出れば箱 a から，3，4，5，6 のいずれかが出れば箱 b から，玉を 1 個取り出す。この試行を 2 回行うとき，次の確率を求めよ。ただし，玉はもとに戻さないものとする。

(1)　1 回目の試行で赤玉の出る確率

(2)　1 回目に白玉が出たとき，2 回目に赤玉の出る確率

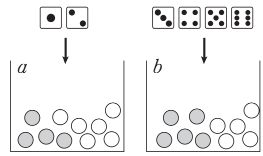
解 答

(1)「箱 a から赤玉を取り出す」という事象を A，「箱 b から赤玉を取り出す」という事象を B とする。

A が起こる確率は，$P(A)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{10}=\frac{2}{15}$

B が起こる確率は，$P(B)=\frac{4}{6}\times\frac{5}{10}=\frac{1}{3}$

A，B は互いに排反なので，求める確率は，$\frac{2}{15}+\frac{1}{3}=\frac{7}{15}$　……(答)



さいころを投げて，1，2 の目が出て，箱 a から赤玉を取り出す確率。

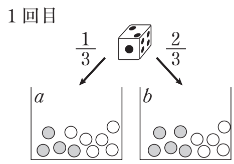
さいころを投げて，3，4，5，6 の目が出て，箱 b から赤玉を取り出す確率。

(2)「1 回目に取り出した玉が白玉である」という事象を C，「2 回目に取り出した玉が赤玉である」という事象を D とすると，求める確率は $P_C(D)$ である。そこで，$P(C)$ と $P(C\cap D)$ を求める。

1 回目が白玉，2 回目が赤玉である事象 $C\cap D$ は，次の 2 通りの場合がある。

(i)　1 回目に箱 a から白玉を取り出し，2 回目に箱 a か b から赤玉を取り出す。

(ii)　1 回目に箱 b から白玉を取り出し，2 回目に箱 a か b から赤玉を取り出す。



(i) の確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{6}{10}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{10}\right)=\frac{13}{135}$

← (1 回目に箱 a から白玉を取り出す。) × (2 回目に箱 a から赤玉を取り出す。 + 2 回目に箱 b から赤玉を取り出す。)

(ii) の確率は，$\frac{2}{3}\times\frac{5}{10}\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{9}\right)=\frac{68}{405}$

← (1 回目に箱 b から白玉を取り出す。) × (2 回目に箱 a から赤玉を取り出す。 + 2 回目に箱 b から赤玉を取り出す。)

(i)，(ii) は互いに排反なので，$P(C\cap D)$ は，

$$P(C\cap D)=\frac{13}{135}+\frac{68}{405}=\frac{107}{405}$$

また，1 回目が白玉となる確率 $P(C)$ は，(1)の余事象だから，

$$P(C)=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

よって，求める確率 $P_C(D)$ は，

$$P_C(D)=\frac{P(C\cap D)}{P(C)}=\frac{107}{405}\div\frac{8}{15}=\frac{107}{216}$$　……(答)

確認　条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B が起こる条件付き確率は，

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

解 説

(2)は，「1 回目に取り出した玉が白玉である」という事象を C，「2 回目に取り出した玉が赤玉である」という事象を D とすると，条件付き確率 $P_C(D)$ の計算だ。$P_C(D)$ を計算するためには，まず $P(C)$ と $P(C\cap D)$ を考えればよい。

解き方のまとめ

条件付き確率の求め方

条件付き確率 $P_A(B)$ を求めるには，A が起こる確率 $P(A)$ と，$A\cap B$ が起こる確率 $P(A\cap B)$ を求め，

条件付き確率の公式　$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$　を用いる。