第１問　２次関数

解答・配点　（配点　20）

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
正解	3	2	2	3	4	0	4	2	−	6
配点	3	5				5		4	3	

解き方

(1)　$f(1)=a-4a+a^2+a-4=a^2-2a-4$

であるから，

$f(1)=-1$ のとき

$a^2-2a-4=-1$

$a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$

$a>0$ であるから　$a=3$　……(答)

(2)　$y=ax^2-4ax+a^2+a-4$　……①

を変形すると

$y=a(x-2)^2+a^2-3a-4$

となるから，放物線①の頂点の座標は

$(2,\ a^2-3a-4)$　……(答)

$a>0$ より，放物線①は下に凸の放物線であるから，これが x 軸と異なる２点で交わるとき，頂点は x 軸より下方にある。よって

$a^2-3a-4<0$

$(a+1)(a-4)<0$

$-1<a<4$

$a>0$ であるから

$0<a<4$　……(答)

◀２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と異なる２点で交わる条件は $b^2-4ac>0$ である。
これを用いて
$(-4a)^2-4a(a^2+a-4)>0$
とし，$a>0$ より
$4a-(a^2+a-4)>0$
この２次不等式を解いてもよい。

(3)　放物線①の軸は $x=2$ で，グラフは下に凸であるから，$0\leqq x\leqq 3$ では，$f(x)$ は $x=2$ から遠い方の端点 $x=0$ で最大となる。

すなわち，最大値は $f(0)=a^2+a-4$ で，これが２に等しいから

$a^2+a-4=2$

$a^2+a-6=0$

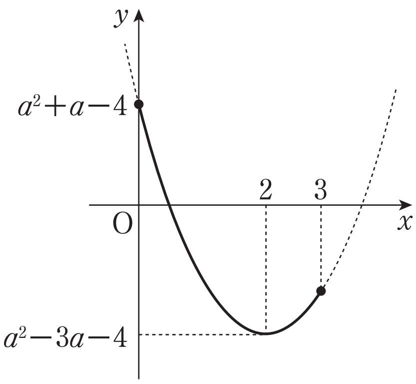
$(a+3)(a-2)=0$

$a>0$ であるから　$a=2$　……(答)

このとき，$f(x)$ の最小値は

$f(2)=a^2-3a-4=2^2-3\cdot2-4=-6$　……(答)

◀放物線①は下のようになる。



第２問　〔１〕集合と命題　〔２〕図形と計量

解答・配点　（配点　25）

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
正解	4	2	4	1	2	2	1	5	2	6	5	1	7	5	7	6	1	2
配点	2	2		3		3	3		3			3	3		3			

解き方

〔1〕

(1)　$A\cap B=\{n|n$ は６の倍数かつ８の倍数$\}$

$=\{n|n$ は 24 の倍数$\}$

$=\{24\cdot1,\ 24\cdot2,\ 24\cdot3,\ 24\cdot4\}$

よって，集合 $A\cap B$ の要素の個数は $n(A\cap B)=4$　……(答)

$A=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ \cdots,\ 6\cdot16\}$ より，$n(A)=16$

$B=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ \cdots,\ 8\cdot12\}$ より，$n(B)=12$

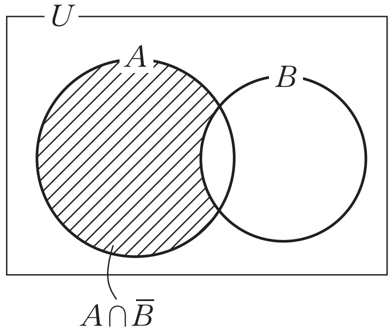
◀解答のように要素を具体的に書き出してみるとわかりやすい。

よって，集合 $A\cup B$ の要素の個数は

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$=16+12-4=24 \quad \cdots\cdots(答)$$

また，集合 $A\cap\overline{B}$ の要素の個数は

$$n\left(A\cap\overline{B}\right)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=16-4=12 \quad \cdots\cdots(答)$$



(2)　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ であるから，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は $\overline{A\cap B}$ に含まれる。
また，6 は $\overline{A\cap B}$ に属するが，$\overline{A}\cap\overline{B}$ に属さないから $\overline{A\cap B}$ は $\overline{A}\cap\overline{B}$ に含まれない。
よって

「n が $\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素である」$\Longrightarrow$「n が $\overline{A\cap B}$ の要素である」

は真である。

「n が $\overline{A\cap B}$ の要素である」$\Longrightarrow$「n が $\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素である」

は偽である。
したがって，U の要素 n について，n が $\overline{A}\cap\overline{B}$ の要素であることは，n が $\overline{A\cap B}$ の要素であるための，**十分条件であるが，必要条件ではない。(②)**
$\cdots\cdots$(答)

◀**ド・モルガンの法則**
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

◀一般に
$p\Longrightarrow q$ が成り立つとき，
「p であることは q であるための十分条件である」といい，
「q であることは p であるための必要条件である」という。

〔2〕
△ABC に余弦定理を適用して

$$\cos B=\frac{5^2+6^2-7^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{1}{5} \quad \cdots\cdots(答)$$

$0^\circ<B<180^\circ$ より　$\sin B>0$
であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}$$
$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \cdots\cdots(答)$$

次に，$\cos B>0$ であるから

$$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos B=5\times\frac{1}{5}=1 \quad \cdots\cdots(答)$$

また

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BC}\cos B=6\times\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$$

そこで，△BDE に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{DE}^2=1^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{5}$$
$$=\frac{49}{25}$$

よって

$$\mathrm{DE}=\frac{7}{5} \quad \cdots\cdots(答)$$

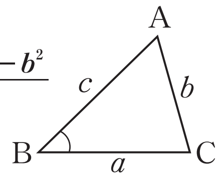
次に，$\angle\mathrm{BDF}=\angle\mathrm{BEF}=90^\circ$ より，4 点 B，D，F，E は BF を直径とする円周上にある。この円の半径を R とし，△BDE に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{DE}}{\sin B}=2R$$

よって

$$2R=\frac{7}{5\sin B}=\frac{7}{2\sqrt{6}}=\frac{7\sqrt{6}}{12}$$

◀**余弦定理**
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$



◀$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より

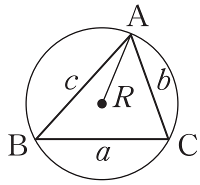
◀もし $\cos B<0$ なら，
$\mathrm{BD}=\mathrm{AB}\cos(180^\circ-B)$ としなければならない。実際は，最大辺 CA に対する ∠B が鋭角であるから，△ABC は鋭角三角形となり，点 D，E はそれぞれ辺 BC，AB 上にある。

◀**余弦定理**
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$

◀ DE は線分の長さを表すから，DE>0 である。

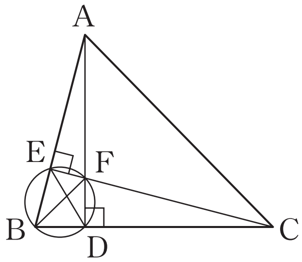
◀ BF が△BDE の外接円の直径に等しいことに注意。

◀**正弦定理**
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$



$2R=\mathrm{BF}$ であるから

$$\mathrm{BF}=\frac{7\sqrt{6}}{12} \quad \cdots\cdots(答)$$



第３問　データの分析

解答・配点　(配点　15)

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
正解	6	0	7	6	5	3	1	7	0	3	3	2	1	4
配点	2		1	2		2	1	1		2		2	1	1

※ス，セは順不同

解き方

(1)　調査 A の 8 個のデータの平均値は，

$$\frac{7+9+5+3+4+7+6+7}{8}=\frac{48}{8}=6.0 \quad \cdots\cdots(答)$$

調査 A のデータを値の小さい順に並べると，次のようになる。

3，4，5，6，7，7，7，9　……①

よって，最頻値は　7　……(答)

また，中央値は小さい方から 4 番目と 5 番目のデータの平均値で，

$$\frac{6+7}{2}=6.5 \quad \cdots\cdots(答)$$

(2)　次に，生徒 c のデータを除いた調査 B のデータを値の小さい順に並べると，次のようになる。

2，3，5，6，7，7，8

また，箱ひげ図から，中央値は 5.5 であるから，c は下半分に属しており，第 1 四分位数が 3 であるから，

$$\frac{3+x}{2}=3$$

よって，$x=3$　……(答)

さらに，生徒 c のデータおよび生徒 e のデータがあるものに注意して，散布図は　①　……(答)

(3)　調査 A の 8 個のデータについて，①より，第 3 四分位数は

$$\frac{7+7}{2}=7.0 \quad \cdots\cdots(答)$$

また，調査 A のデータについて平均値は 6.0 であったから，調査 A の分散を $s_A{}^2$ とすると

$$\begin{aligned} s_A{}^2&=\frac{1}{8}\{(3-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(7-6)^2 \\ &\qquad +(7-6)^2+(9-6)^2\} \\ &=\frac{1}{8}(9+4+1+0+1+1+1+9) \\ &=\frac{26}{8}=3.25\fallingdotseq 3.3 \quad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

次に，調査 A のデータについて最小値が 3，第 1 四分位数が 4.5，中央値が 6.5，第 3 四分位数が 7，最大値が 9 であることから，

◀**平均値**
データの値が，n 個の値 x_1，x_2，……，x_n であるとき，データの平均値を $\overline{x}$ とすると，

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

◀**中央値**
データを値の大きさの順に並べたとき，中央の位置にくる値を中央値という。
データの個数が偶数のときは，中央の2つの値の平均値を中央値とする。

◀**四分位数**
データを値の大きさの順に並べたとき，4 等分する位置にくる値を，四分位数という。
四分位数は，小さい方から第 1 四分位数，第 2 四分位数，第 3 四分位数といい，これらを順に Q_1，Q_2，Q_3 で表す。

◀**分散**
変量 x のデータの値が x_1，x_2，……，x_n で，その平均値が $\overline{x}$ のとき，分散を s^2 とすると，

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

分散は，データの平均値からの散らばりの度合いを表す量である。

箱ひげ図で正しいものは，② ……(答)

また，調査 A のデータの平均値は　6.0

調査 A のデータの範囲は　$9-3=6$

調査 A の四分位範囲は　$7-4.5=2.5$

調査 B のデータの平均値は

$$\frac{6+7+3+2+5+8+3+7}{8}=\frac{41}{8}=5.125\fallingdotseq 5.1$$

調査 B のデータの範囲は　$8-2=6$

調査 B の四分位範囲は　$7-3=4$

よって，①は正しく，⓪，②，③は誤り。

また，$s_A{}^2\fallingdotseq 3.3$，調査 B のデータの分散を $s_B{}^2$ とすると $s_B{}^2\fallingdotseq 4.4$ であるから，

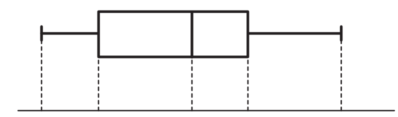
調査 A と調査 B のデータの標準偏差 s_A，s_B は，

$$s_A<s_B$$

よって，④は正しい。

したがって，正しいものは，①と④ ……(答)

◀**箱ひげ図**



Q_1：第 1 四分位数

Q_3：第 3 四分位数

◀**データの範囲**

データの最大値と最小値の差を範囲という。

◀**四分位範囲**

第 3 四分位数から第 1 四分位数を引いたものを四分位範囲という。

◀**標準偏差**

分散を s^2 とすると，$s=\sqrt{s^2}$ をデータの標準偏差という。

第４問　場合の数と確率

解答・配点　(配点　20)

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ
正解	1	3	1	6	4	2	7	4	0	2	4	3	5	3	6	1	8	7	8	6	4
配点	3		3		4			4					3			3					

解き方

(1)　さいころの目の出方は $6^2=36$ 通りあり，これらはすべて同様に確からしい。

このうち，A が得点するのは A のさいころの目 a，B のさいころの目 b が

$$(a,\ b)=(3,\ 1),(4,\ 2),(5,\ 3),(6,\ 4),(5,\ 1),(6,\ 2),$$
$$(1,\ 3),(2,\ 4),(3,\ 5),(4,\ 6),(1,\ 5),(2,\ 6)$$

の 12 通りある。

◀$a-b=\pm 2$，± 4 のときである。

よって，A が得点する確率は　$\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$ ……(答)

また，B が得点するのは

$$(a,\ b)=(1,\ 1),(2,\ 2),(3,\ 3),(4,\ 4),(5,\ 5),(6,\ 6)$$

の 6 通りあるから，B が得点する確率は　$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ ……(答)

(2)　このゲームを 1 回行ったとき，A が得点しない確率は　$1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$　であり，

各回の試行は独立であるから，3 回目に初めて A が得点する確率は

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$$ ……(答)

◀ 1 回目は得点しない，2 回目も得点しない，3 回目は得点する確率である。

(3)(i)　A の総得点が 3 点になるのは，5 回中 3 回 A が得点する場合である。

その確率は

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{40}{243}$$ ……(答)

◀**反復試行の確率**

1 回の試行で事象 E の起こる確率が p のとき，n 回中 r 回 E が起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\,p^r(1-p)^{n-r}$$

(ii)　A，B それぞれの総得点が 1 点となるのは，A，B がそれぞれ 1 回ずつ得点し，3 回はどちらも得点しない場合である。

1 回のゲームで B が得点する確率は $\dfrac{1}{6}$，どちらも得点しない確率は

$1-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$　である。

「A が得点」「B が得点」「どちらも得点しない」の順序は $\dfrac{5!}{3!}=20$（通り）あるから，求める確率は

$$20\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{36}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

◀「A が得点」を○,「B が得点」を×,「どちらも得点しない」を△で示すと，○，×，△，△，△の順列の個数となる。

(iii) A，B がともに 0 点，1 点，2 点になる場合がある。

ともに 0 点となるのは 5 回すべてどちらも得点しないときで，その確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

◀ 1 回のゲームで A，B がともに得点することはないから，5 回のゲームで A，B がともに 3 点以上の得点をあげることはない。

ともに 1 点となる確率は(ii)により $\dfrac{5}{36}$

ともに 2 点となるのは A，B がそれぞれ 2 回ずつ得点し，1 回はどちらも得点しないときで，その確率は(ii)と同様に考えて

$$\frac{5!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{108}$$

以上より，求める確率は

$$\frac{1}{32}+\frac{5}{36}+\frac{5}{108}=\frac{3^3+5\times2^3\times3+5\times2^3}{2^5\times3^3}=\frac{187}{864}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

第５問　整数の性質

解答・配点　（配点　20）

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
正解	1	1	2	1	4	2	−	1	−	4	1	6	−	4
配点	5				3	3			3			3	3	

解き方

(1)
$$\begin{aligned}x^2+(y+2)x-2y^2+y+1&=x^2+(y+2)x-(2y+1)(y-1)\\&=\{x-(y-1)\}\{x+(2y+1)\}\\&=(x-1y+1)(x+2y+1)\quad\cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

①を変形すると $x^2+(y+2)x-2y^2+y+1=4$ より

$$(x-1y+1)(x+2y+1)=4\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $x-1y+1>x+2y+1>0$ のとき

$$\begin{cases}x-y+1=4\\x+2y+1=1\end{cases}$$

となり，①を満たす $(x,\ y)$ は，

$$(x,\ y)=(2,\ -1)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

$x-1y+1<x+2y+1<0$ のとき

$$\begin{cases}x-y+1=-4\\x+2y+1=-1\end{cases}$$

となり，①を満たす $(x,\ y)$ は，

$$(x,\ y)=(-4,\ 1)\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

(3) ①を満たす $x-y+1$, $x+2y+1$ の組は, (2)の解以外に, 以下の場合がある。

$$\begin{cases}x-y+1=1\\x+2y+1=4\end{cases}\text{のとき}\quad(x,\ y)=(1,\ 1)$$

$$\begin{cases}x-y+1=-1\\x+2y+1=-4\end{cases}\text{のとき}\quad(x,\ y)=(-3,\ -1)$$

$$\begin{cases}x-y+1=2\\x+2y+1=2\end{cases}\text{のとき}\quad(x,\ y)=(1,\ 0)$$

$$\begin{cases}x-y+1=-2\\x+2y+1=-2\end{cases}\text{のとき}\quad(x,\ y)=(-3,\ 0)$$

以上から，全部で 6 通り　……(答)

その中で $(x,\ y)=(-3,\ -1)$ のとき，$x+y$ の最小値は -4　……(答)

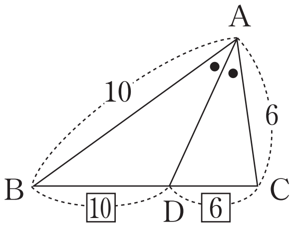
第６問　図形の性質

解答・配点　(配点　20)

解答記号	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
正解	5	3	8	5	1	8	4	5	9
配点	4		4		4		4		4

解き方

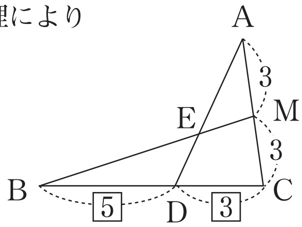
(1)　AD は ∠A の二等分線であるから



$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{10}{6}$$

$$=\frac{5}{3}\quad\text{……(答)}$$

(2)　△ACD と直線 BM において，メネラウスの定理により



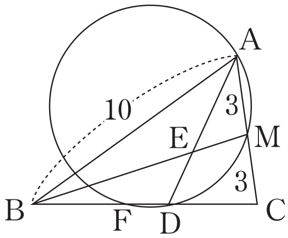
$$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CM}{MA}=1$$

$$\frac{AE}{ED}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{3}=1$$

よって

$$\frac{AE}{ED}=\frac{8}{5}\quad\text{……(答)}$$

(3)　方べきの定理により



$$CD\cdot CF=CM\cdot CA$$
$$=3\cdot 6$$
$$=18\quad\text{……(答)}$$

したがって，$BC=x$ とおくと

$$\frac{3}{8}x\cdot\frac{3}{5}x=18$$

$$x^2=80$$

$x>0$ より

$$x=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

ゆえに　$BC=4\sqrt{5}$　……(答)

また，M は AC の中点であるから，中線定理により

$$AB^2+BC^2=2(BM^2+AM^2)$$
$$100+80=2(BM^2+9)$$
$$BM^2=81$$

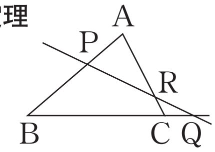
$BM>0$ より

$$BM=9\quad\text{……(答)}$$

◀△ABC において，∠A の二等分線と BC の交点を D とすると

AB：AC＝BD：DC

◀**メネラウスの定理**



1 つの直線が△ABC の 3 辺 AB，BC，CA またはその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

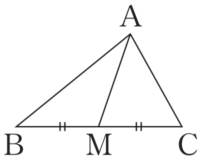
◀BD：DC＝5：3 より

$$CD=\frac{3}{8}BC$$

BF：FC＝2：3 より

$$CF=\frac{3}{5}BC$$

◀**中線定理**



△ABC において，BC の中点を M とすると

$$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$$

◀中線定理を使わずに，次のように求めてもよい。

△ABC において余弦定理により，

$$\cos C=\frac{(4\sqrt{5})^2+6^2-10^2}{2\cdot 4\sqrt{5}\cdot 6}=\frac{1}{3\sqrt{5}}$$

△BCM において余弦定理により，

$$BM^2=(4\sqrt{5})^2+3^2-2\cdot 4\sqrt{5}\cdot 3\cdot\frac{1}{3\sqrt{5}}$$
$$=81$$

よって，BM＝9　……(答)